Příklady z logiky – 3

1. Negujte následující formule tak, aby negace nebyly před kvantifikátory:

   $((\forall x)x < 5) \leftrightarrow (\exists y)((\forall z)x + 5 = y + z)$

   $((\forall x)x > 0 \mathbin{\&} (\exists y)y > x) \vee ((\exists z)z = x + y \to (\forall a)a < z)$

2. Ověřte, zda jsou následující formule platné v nějaké realizaci jazyka, případně zda jsou platné v každé realizaci jazyka:

   $(\exists x)P(x)$

   $(\forall x)P(x)$

   $(\exists x)(\forall y)(P(x,x) \mathbin{\&} \neg P(x,y))$

   $(\exists x)(\exists y)(P(x) \mathbin{\&} \neg P(y))$

   $(\exists x)(\forall y)P(x,y) \to (\forall y)(\exists x)P(x,y)$

   $(\exists x)(\forall y)P(x,y) \to (\forall z)(\exists x)Q(x,y,z)$

   $(\forall x)(\exists y)P(x,y) \to (\exists y)(\forall x)P(x,y)$

3. Určete, zda ve struktuře $M = \langle M, f \rangle$, kde $M = 0, 1, 2, 3, f(0) = 1, f(1) = 2, f(2) = 1, f(3) = 2$, platí následující formule:

   $(\forall x)(\exists y)(x = f(y))$

   $(\exists x)(f(f(x)) = x) \to (\exists x)(f(x) = x)$

   $(\exists y)(x = f(y)) \to f(f(x)) = x$

   $(f(x) = x) \to (f(x) \neq x)$

4. Rozhodněte, zda je teorie s jediným binárním predikátem R a s axiomy $(\forall x)(\forall y)(\exists z)(R(x,z) \mathbin{\&} R(y,z))$ a $\neg(\exists x)R(x,x)$ bezesporná.

5. Rozhodněte, zda je teorie se dvěma unárními predikáty R a S a s axiomem $(\forall x)(\exists y)(R(x) \to S(y)) \to (\exists y)(\forall x)(R(x) \to S(y))$ bezesporná.

6. Sestrojte dvě realizace jazyka takové, aby v jedné formule $(\forall x)(\exists y)x = y + y$ platila a v jedné neplatila.

7. Přepište formuli $(\forall a)(\exists x)(\forall b)(\exists y)ax = b^y$ na dvě ekvivalentní, ve kterých bude použit jen jeden typ kvantifikátoru (jednou obecný, jednou existenční).