Řešení písemky z Automatů a gramatik z 14:00-15:30, pondělí 12.5.2003:

1) "sloveso" redukovaný konečný automat přijímající jazyk slov nad abecedou $\{a, b\}$ neobsahujících *abab* ani *baba*:

Automat *abab* (s důkazem redukce):

		a		b		$\sim_0$	b	$\sim_1$	a	$\sim_2$	b	$\sim_3$
$\to \lambda$	0	a	1	λ	0	0	0	0	0	0	0	0
a	1	a	1	ab	2	0	0	0	0	0	2	1
ab	2	aba	3	λ	0	0	0	0	3	2		
aba	3	a	1	$abab$	4	0	4	3				
$\leftarrow abab$	4	$abab$	4	$abab$	4	4						

Automat vzniklý průnikem negací (s důkazem redukce):

	a	b	$\sim_0$	a	b	$\sim_1$	a	b	$\sim_2$	a	b	$\sim_3$
$\leftrightarrow$ 00	10	01	**00**	**00**	**00**	00	00	00	00	00	00	00
$\leftarrow$ 10	10	21	**00**	**00**	**00**	00	00	00	00	00	**21**	**10**
$\leftarrow$ 01	12	01	**00**	**00**	**00**	00	00	00	00	**12**	00	**01**
$\leftarrow$ 21	32	01	**00**	**00**	**00**	00	**32**	00	**21**			
$\leftarrow$ 12	10	23	**00**	**00**	**00**	00	00	**23**	**12**			
$\leftarrow$ 32	10	4	**00**	**00**	**4**	**32**						
$\leftarrow$ 23	4	01	**00**	**4**	**00**	**23**						
4	4	4	**4**	**4**	**4**	43						

2) Zařaďte do Chomskiho hierarchie jazyk slov tvaru $b|q$, kde $\exists k$, b je binární zápis čísla k a q^R je quarternární zápis čísla k.
Příklad: 0|0, 1|1, 10|2, 11|3, 100|01, 101|11:
Zkoumaný jazyk L patří do $\mathcal{L}_2 \setminus \mathcal{L}_3$:
Do $\mathcal{L}_3$ nemůže L patřit, protože pro dostatečně velké $k > 2$ jsou splněny ostatní předpoklady pumping lemmatu a tedy za předpokladu regularity $b|q = v_1 v_2 v_3$, $|v_2| > 0$ a $v_1 v_2^2 v_3 \in L$. Slovo $v_1 v_2^2 v_3$ je tedy tvaru $(0+1)^\star|(0+1+2+3)^\star$ a v_2 neobsahuje $|$. V takovém případě ale vzroste právě jedno z čísel b, q, což je spor odvozený z předpokladu regularity.

Příslošnost L do $\mathcal{L}_2$ prokážeme pomocí bezkontextové gramatiky, která jazyk generuje:

$S \to 0|0 \mid 1\overline{|}1 \mid 10\overline{|}2 \mid 11\overline{|}3;\quad \overline{|} \to 00\overline{|}0 \mid 01\overline{|}1 \mid 10\overline{|}2 \mid 11\overline{|}3;\quad \overline{|} \to |.$

Gramatika současně generuje cifry v čtyřkové soustavě od nejvýznamnějších po nejméně významné (v levé části slova je reprezentuje po bitech). Úvodní rozskok umožňuje zapsat čísla s lichým počtem bitů bez úvodní nuly.

3) Rozhodněte, zda deterministické dvoucestné zásobníkové automaty mají jinou "sílu" než nedeterministické (jednocestné) zásobníkové automaty:
Existuje dvoucestný zásobníkový automat přijímající jazyk $0^n 1^n 2^n$. O tomto jazyce víme (pumping lemma), že není bezkontextový. Není tedy přijímaný „jednocestnými" nedeterministickými zásobníkovými automaty.

Nástin programu:
V první fázi automat zkontroluje, že slovo začíná $0^n 1^n 2$. To zvládne průchodem doprava s tím, že nadbytek počtu přečtených nul nad jedničkami eviduje hloubkou zásobníku. Po této fázi se automat vrátí za poslední 0 původního úseku. Nakonec zkontroluje, že zbytek slova je tvaru $1^n 2^n$. To zvládne analogicky průchodem doprava s tím, že nadbytek počtu přečtených jedniček nad dvojkami eviduje hloubkou zásobníku.
Na druhou stranu jazyk $|ww^R|$, kde $w \in \{0, 1\}^\star$ je přijímaný jednocestnými nedeterministickými zásobníkovými automaty. Domníváme se, že není přijímaný deterministickými jednocestnými zásobníkovými automaty. Ale dvoucestný deterministický zásobníkový automat přijímající uvedený jazyk existuje.

Nástin programu:
V první fázi automat opíše část mezi || na zásobník a zkontroluje sudost délky opsané části. Po této fázi se automat vrátí na počátek slova (úvodní |). V druhé fázi automat vyprazdňuje zásobník a kontroluje, že

slovo mezi || je palindrom ($x = x^R$). Z toho plyne, že slovo je tvaru $|ww^R|*$. Stačí ověřit, že bezprostředně za druhou | slovo končí.
O druhé inkluzi si netroufám nic tvrdit.

4) Popište regulárním výrazem jazyk slov nad abecedou $\{0, 1\}$ obsahujících lichý počet nul a neobsahujících podřetězec 11:
Například $((1+\lambda)0(1+\lambda)0)^\star(1+\lambda)0(1+\lambda)$. Metodický a zároveň neúnosně zdlouhavý postup naznačuje Kleeneho věta: Příslušný automat:

	0	1
$\to \lambda$	0	1
$\leftarrow 0$	λ	01
1	0	F
$\leftarrow 01$	λ	F
F	F	F

Jemu odpovídající matice regulárních jazyků, potřebných k výpočtu $M^\star$ na základě vzorce $M^{k+1}_{i,j} = M^k_{i,j} + M^k_{i,v_k}\left(M^k_{v_k,v_k}\right)^\star M^k_{v_k,i}$. Řádek v_k můžeme odstranit, pokud v_k není počáteční stav. Sloupec v_k můžeme odstranit, pokud v_k není koncový stav.

$$M^0 = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 1 & & \\ 0 & \lambda & & 1 & \\ & 0 & \lambda & & 1 \\ 0 & & & \lambda & 1 \\ & & & & \lambda+0+1 \end{pmatrix} \qquad M^1_{(F)} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 1 & \\ 0 & \lambda & & 1 \\ & 0 & \lambda & \\ 0 & & & \lambda \end{pmatrix} \qquad M^2_{(1)} = \begin{pmatrix} \lambda & 0+10 & \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & & \lambda \end{pmatrix}$$

$$M^3_{(01)} = \begin{pmatrix} \lambda & 0+10 & \\ 0+10 & \lambda & 1 \end{pmatrix} \quad M^4_{(0)} = \begin{pmatrix} \lambda+(0+10)(0+10) & 0+10 & (0+10)1 \end{pmatrix}$$

Hledaný regulární výraz odpovídá $M^\star_{\lambda,0} + M^\star_{\lambda,01} = M^4_{(0)\lambda,0} + M^4_{(0)\lambda,01} + \left(M^4_{(0)\lambda,\lambda}\right)^+ (M^4_{(0)\lambda,0} + (M^4_{(0)\lambda,01}) = 0+10+(0+10)1+((0+10)(0+10))^\star\big((0+10)+(0+10)1\big) = \big((0+10)(0+10)\big)^\star\big((0+10)+(0+10)1\big)$