Řešení písemky z Automatů a gramatik z 12:20-14:00, pondělí 12.5.2003:

1) "sloveso" redukovaný konečný automat přijímající jazyk slov nad abecedou $\{a, b\}$ obsahujících $abab$ a neobsahujících $baba$.

Automat *abab* (s důkazem redukce):

		a		b		$\sim_0$	b	$\sim_1$	a	$\sim_2$	b	$\sim_3$
$\rightarrow \lambda$	0	a	1	λ	0	0	0	0	0	0	0	0
a	1	a	1	ab	2	0	0	0	0	0	2	1
ab	2	aba	3	λ	0	0	0	0	3	2		
aba	3	a	1	$abab$	4	0	4	3				
$\leftarrow abab$	4	$abab$	4	$abab$	4	4						

Rozdílový automat (s důkazem redukce):

	a	b	$\sim_0$	a	b	$\sim_1$	a	b	$\sim_2$	a	b	$\sim_3$	a	b	$\sim_4$	a	b	$\sim_5$	a	b	$\sim_6$	a	b	$\sim_7$
$\rightarrow$ 00	10	01	**00**	**00**	**00**	00	00	00	00	00	00	00	**10**	00	00	10	**01**	00	10	01	00	10	01	00
10	10	21	**00**	**00**	**00**	00	00	00	00	00	**21**	**10**												
01	12	01	**00**	**00**	**00**	00	00	00	00	00	00	00	00	00	**01**	00	**01**	01	00	01	01			
21	32	01	**00**	**00**	**00**	00	**32**	00	**21**															
12	10	23	**00**	**00**	**00**	00	00	00	00	00	00	00	**10**	00	00	10	**01**	00	10	01	00	10	**23**	**12**
32	10	43	**00**	**00**	**43**	**32**																		
23	$\star$4	01	**00**	**00**	**00**	00	00	00	00	00	00	00	00	00	**01**	00	**01**	01	**$\star$4**	01	**23**			
$\leftarrow$ 43	$\star$4	41	**43**	**00**	**43**	43																		
$\star$4	$\star$4	$\star$4	**00**	**00**	**00**	00	00	00	00	00	00	00	00	00	**01**	**01**	**01**	**$\star$4**						
$\leftarrow$ 41	42	41	**43**	**43**	**43**	**41**	**41**	**41**	41	**42**	41	41												
$\leftarrow$ 42	40	43	**43**	**43**	**43**	**41**	**41**	43	**42**															
$\leftarrow$ 40	40	41	**43**	**43**	**43**	**41**	**41**	**41**	41	41	41	**40**												

2) Zařaďte do Chomskiho hierarchie jazyk slov tvaru $b|t$, kde $\exists k$, b je binární zápis čísla k a t^R je ternární zápis čísla k.

Příklad: 0|0, 1|1, 10|2, 11|01, 100|11, 101|21:

Zkoumaný jazyk L patří do $\mathcal{L}_1 \setminus \mathcal{L}_2$:

Do $\mathcal{L}_2$ nemůže L patřit, protože pro dostatečně velké k jsou splněny ostatní předpoklady pumping lemmatu a tedy za předpokladu bezkontextovosti $b|t = v_1 v_2 v_3 v_4 v_5$, $|v_2 v_4| > 0$ a $\forall i\ v_1 v_2^i v_3 v_4^i v_5 \in L$. Slovo $v_1 v_2^k v_3 v_4^k v_5$ je tedy tvaru $(0+1)^\star|(0+1+2)^\star$. Protože $|v_2 v_4| > 0$, buď b nebo t v $v_1 v_2^i v_3 v_4^i v_5$ vzrostlo. Vzhledem k zachování rovnosti musely vzrůst obě a slovo je tvaru $b_2 b_1^i b_0 | t_0 t_1^i t_2$. Odpovídající čísla jsou $b_2 \cdot 2^{i|b_1|+|b_0|} + b_1 \cdot \frac{2^{(i+1)|b_1|}-1}{2^{|b_1|}-1} \cdot 2^{|b_0|} + b_0$ a $t_2 \cdot 3^{i|t_1|+|t_0|} + t_1 \cdot \frac{3^{(i+1)|t_1|}-1}{2^{|t_1|}-1} \cdot 2^{|t_0|} + t_0$. Po roznásobení dostáváme pro všechna i rovnost tvaru $A + B \cdot \left(2^{|b_1|}\right)^i = C + D \cdot \left(3^{|t_1|}\right)^i$, kde A, B, C, D jsou kladná celá čísla. Rovnost v takovém případě v rovnicích tvaru $A + B \cdot q_1^i = C + D \cdot q_2^i$ (kde q_1, q_2 jsou kladná) nastává jen pokud $A = C$, $B = D$ a $q_1 = q_2$. Ale $2^{|b_1|} \neq 3^{|t_1|}$ je spor odvozený z předpokladu bezkontextovosti.

Příslošnost L do $\mathcal{L}_1$ prokážeme pomocí monotónní gramatiky, která jazyk generuje:

$S \rightarrow 0|0 \mid 1|1 \mid 10|2 \mid 1^L \overline{1}\, \overline{|}\, \overline{0} 1^R$; $\quad \overline{|} \rightarrow +_L$;

$\overline{0}+_L \rightarrow \overline{1}+_R$; $\quad \overline{1}+_L \rightarrow 0_L^+|_L$; $\quad \overline{0}0_L^+ \rightarrow \overline{1}0_L$; $\quad \overline{1}0_L^+ \rightarrow 0_L^+\overline{0}$; $\quad 1^L 0_L^+ \rightarrow 1^L \overline{0} 0_L|_L$; $\quad 0_L\overline{0} \rightarrow \overline{0}0_L$; $\quad 0_L|_L \rightarrow \overline{0}+_R$;

$+_R\overline{0} \rightarrow |\overline{1}$; $\quad +_R\overline{1} \rightarrow |\overline{2}$; $\quad +_R\overline{2} \rightarrow |_R\overline{0}_R^+$; $\quad 0_R^+\overline{0} \rightarrow 0_R\overline{1}$; $\quad 0_R^+\overline{1} \rightarrow 0_R\overline{2}$; $\quad 0_R^+\overline{2} \rightarrow \overline{0}0_R^+$; $\quad 0_R^+1^R \rightarrow 0_R 2^R$; $\quad 0_R^+2^R \rightarrow 0_R\overline{0}1^R$; $\quad \overline{0}0_R \rightarrow 0_R\overline{0}$; $\quad |_R 0_R \rightarrow |\overline{0}$;

$\overline{0} \rightarrow 0$; $\quad \overline{1}|1^L|1^R \rightarrow 1$; $\quad \overline{2}|2^R \rightarrow 2$; $\quad \overline{|} \rightarrow |$.

Gramatika postupně prochází všechna přirozená čísla, dokud nedeterministicky nepřejde od „dvojníků“ k odpovidajícím terminálům.

Neterminál $+_L$ (resp. $|_L$) je možno odstranit jedině za předpokladu, že úspěšně skončil „podprogram“ na zvýšení binárního čísla o 1. V takovém případě je nahrazen neterminálem $+_R$. Ten (resp. $|_R$) je možno odstranit jedině za předpokladu, že úspěšně skončil „podprogram“ na zvýšení ternárního čísla o 1. V takovém případě je nahrazen neterminálem $\overline{|}$. Neterminály 1^L, 1^R, 2^R slouží k označení konce slova.

3) Rozhodněte, zda dvoucestné zásobníkové automaty mají jinou "sílu" než (jednocestné) zásobníkové automaty (nedeterministické) (viz písemku z 7.5.):
Jedna inkluze je triviální, druhá neplatná, protože existuje dvoucestný zásobníkový automat přijímající jazyk $0^n1^n2^n$. O tomto jazyce víme (pumping lemma), že není bezkontextový. Není tedy přijímaný „jednocestnými“ nedeterministickými zásobníkovými automaty.

Nástin programu:
V první fázi automat zkontroluje, že slovo začíná 0^n1^n2. To zvládne průchodem doprava s tím, že nadbytek počtu přečtených nul nad jedničkami eviduje hloubkou zásobníku. Po této fázi se automat vrátí za poslední 0 původního úseku. Nakonec zkontroluje, že zbytek slova je tvaru 1^n2^n. To zvládne analogicky průchodem doprava s tím, že nadbytek počtu přečtených jedniček nad dvojkami eviduje hloubkou zásobníku.

4) Popište regulárním výrazem jazyk slov nad abecedou $\{0,1\}$ obsahujících sudý počet nul a neobsahujících podřetězec 11.
Například $((1+\lambda)0(1+\lambda)0)^\star(1+\lambda)$. Metodický a zároveň neúnosně zdlouhavý postup naznačuje Kleeneho věta: Příslušný automat:

	0	1
$\leftrightarrow \lambda$	0	1
0	λ	01
$\leftarrow 1$	0	F
01	λ	F
F	F	F

Jemu odpovídající matice regulárních jazyků, potřebných k výpočtu $M^\star_{\lambda,\lambda}$ na základě vzorce $M^{k+1}_{i,j} = M^k_{i,j} + M^k_{i,v_k}\left(M^k_{v_k,v_k}\right)^\star M^k_{v_k,i}$. Řádek v_k můžeme odstranit, pokud v_k není počáteční stav. Sloupec v_k můžeme odstranit, pokud v_k není koncový stav.

$$M^0 = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 1 & & \\ 0 & \lambda & & 1 & \\ & 0 & \lambda & & 1 \\ 0 & & & \lambda & 1 \\ & & & & \lambda+0+1 \end{pmatrix} \qquad M^1_{(F)} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 1 & \\ 0 & \lambda & & 1 \\ & 0 & \lambda & \\ 0 & & & \lambda \end{pmatrix} \qquad M^2_{(01)} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 1 \\ 0+10 & \lambda & \\ & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

$$M^3_{(0)} = \begin{pmatrix} \lambda + 0(0+10) & 1 \\ 0(0+10) & \lambda \end{pmatrix} \quad M^4_{(1)} = \begin{pmatrix} \lambda + 0(0+10) + 10(0+10) & 1 \end{pmatrix}$$

Hledaný regulární výraz odpovídá $M^\star_{\lambda,\lambda} + M^\star_{\lambda,1} = \left(M^4_{(1)\lambda,\lambda}\right)^\star + M^4_{(1)\lambda,1} + \left(M^4_{(1)\lambda,\lambda}\right)^+ M^4_{(1)\lambda,1} = \big((0+10)(0+10)\big)^\star + 1 + \big((0+10)(0+10)\big)^\star 1 = \big((0+10)(0+10)\big)^\star + \big((0+10)(0+10)\big)^\star 1$.