Automaty a gramatiky

Roman Barták, KTIML

bartak@ktiml.mff.cuni.cz
http://ktiml.mff.cuni.cz/~bartak

Organizační záležitosti

Přednáška:

- na webu (http://ktiml.mff.cuni.cz/~bartak/automaty)
- Proč chodit na přednášku?
  - dozvíte se více než při pouhém čtení slajdů
  - bude zábava (někdy)

Cvičení:

- Proč chodit na cvičení?
  - vyzkoušíte si, zda látce rozumíte
  - rozšíříte si znalosti z přednášky

Zkouška:

- písemná a ústní část
- porozumění látce + schopnost formalizace

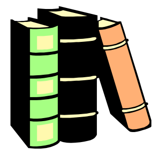
O čem bude přednáška?

studium konečného popisu nekonečných objektů
studium abstraktních výpočetních zařízení

dvě větve: automaty a gramatiky

konečné automaty	regulární gramatiky
zásobníkové automaty	bezkontextové gramatiky
lineárně omezené automaty	kontextové gramatiky
Turingovy stroje	gramatiky typu 0

Zdroje a literatura



R. Barták: *Automaty a gramatiky: on-line*
http://ktiml.mff.cuni.cz/~bartak/automaty

M. Chytil: *Automaty a gramatiky*, SNTL Praha, 1984

V. Koubek: *Automaty a gramatiky*, elektronický text, 1996

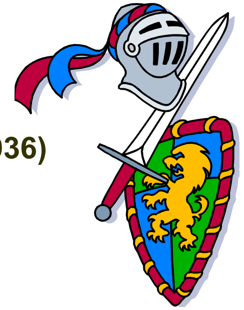
M. Chytil: *Teorie automatů a formálních jazyků*, skripta

M. Chytil: *Sbírka řešených příkladů z teorie automatů a formálních jazyků*, skripta

M. Demlová, V. Koubek: *Algebraická teorie automatů*, SNTL Praha, 1990

J.E. Hopcroft, R. Motwani, J.D. Ullman: *Introduction to Automata Theory, Languages and Computation*, Addison-Wesley

Pohled do historie



Počátky ve druhé čtvrtině 20. století
- první formalizace pojmu algoritmus (1936)
- co stroje umí a co ne?
- Church, Turing, Kleene, Post, Markov

Polovina 20. století
- neuronové sítě (1943)
- konečné automaty (Kleene 1956 neuronové sítě ≈ KA)

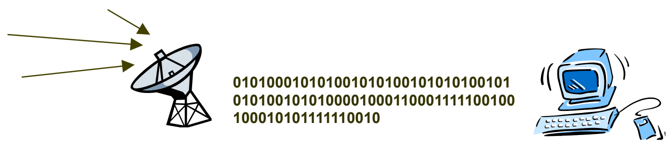
60. léta 20. století
- gramatiky (Chomsky)
- zásobníkové automaty
- formální teorie konečných automatů

Praktické využití

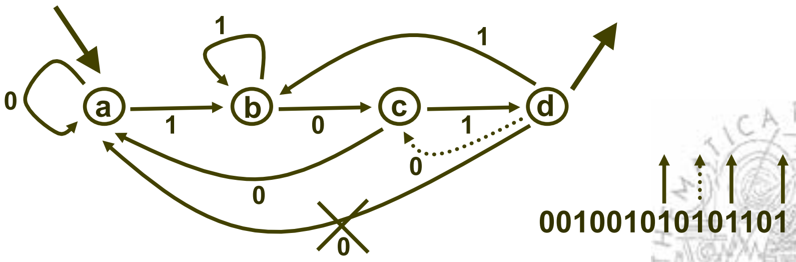
- ✓ zpracování přirozeného jazyka
- ✓ překladače
- ✓ návrh, popis a verifikace hardware
  - integrované obvody, stroje, automaty
- ✓ realizace pomocí software
  - formální popis → program
  - hledání výskytu slova v textu, verifikace systémů s konečně stavy (protokoly,…), …
- ✓ aplikace v biologii
  - simulace růstu
  - celulární automaty
  - sebe-reprodukce automatů

Úvod do konečných automatů

Projekt SETI (Search Extra-Terrestrial Intelligence)
- analýza signálů - hledání vzorku

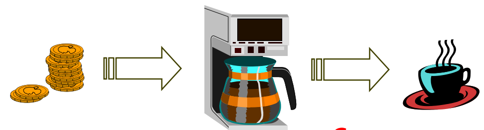


Hledání vzorku „101“

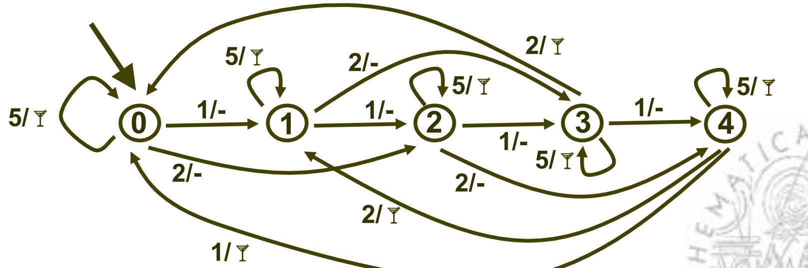


Úvod do konečných automatů 2

Stroj na kávu
- stroj signalizuje vydání kávy po vhození potřebného obnosu



Vstupem stroje jsou mince 1,2,5 ~~Kč~~ €, káva stojí 5 ~~Kč~~ €



Realizace pomocí Mealyho stroje s výstupem při přechodu.

Formalizace konečného automatu

Konečným automatem **nazýváme pětici**

$$A = (Q, X, \delta, q_0, F),$$

kde:

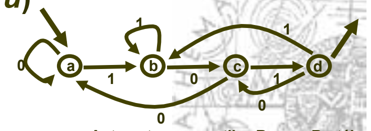
Q - konečná neprázdná množina stavů (*stavový prostor*)

X - konečná neprázdná množina symbolů (*vstupní abeceda*)

δ - zobrazení $Q \times X \rightarrow Q$ (*přechodová funkce*)

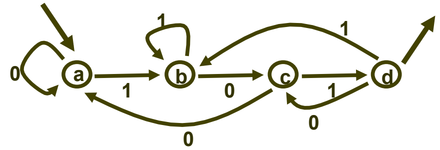
$q_0 \in Q$ (*počáteční stav*)

$F \subseteq Q$ (*množina přijímacích stavů*)



Popis konečného automatu

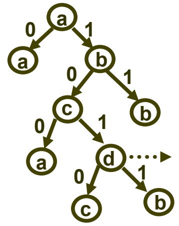
Stavový diagram (graf)
vrcholy = stavy
hrany = přechody



Tabulka
řádky = stavy+přechody
sloupce = písmena

	0	1
→ a	a	b
b	c	b
c	a	d
← d	c	b

Stavový strom
vrcholy = stavy
hrany = přechody
pouze dosažitelné stavy!



Abeceda, slova, jazyky

abeceda **X = konečná neprázdná množina symbolů**
slovo **= konečná posloupnost symbolů (i prázdná)**
prázdné slovo λ (e, ε, ...)
X^* = množina všech slov v abecedě X
X^+ = množina všech neprázdných slov v abecedě X
$X^* = X^+ \cup \{\lambda\}$
jazyk **$L \subseteq X^*$ (množina slov v abecedě X)**

Základní operace se slovy:
zřetězení slov u.v, uv
mocnina u^n ($u^0 = \lambda$, $u^1 = u$, $u^{n+1} = u^n.u$)
délka slova $|u|$ ($|\lambda| = 0$)

Rozšířená přechodová funkce

přechodová funkce δ: $Q \times X \rightarrow Q$
rozšířená přechodová funkce δ^* : $Q \times X^* \rightarrow Q$
tranzitivní uzávěr δ
induktivní definice
$\delta^*(q,\lambda) = q$
$\delta^*(q,wx) = \delta(\delta^*(q,w),x), \quad x \in X, w \in X^*$

úmluva:
δ^* budeme někdy označovat také jako δ

Jazyky rozpoznatelné konečnými automaty

Jazykem rozpoznávaným (akceptovaným, přijímaným) konečným automatem $A = (Q,X,\delta,q_0,F)$ nazveme jazyk:

$$L(A) = \{w \mid w \in X^* \ \wedge\ \delta^*(q_0,w) \in F\}.$$

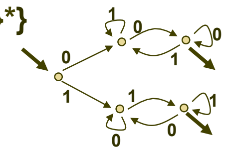
Slovo w je *přijímáno* automatem A, právě když $w \in L(A)$.

Jazyk L je *rozpoznatelný* konečným automatem, jestliže existuje konečný automat A takový, že $L=L(A)$.

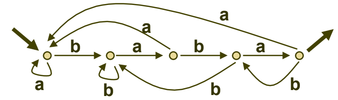
Třídu jazyků rozpoznatelných konečnými automaty značíme $\mathcal{F}$, tzv. *regulární jazyky*.

Příklady regulárních jazyků

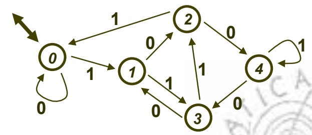
$L= \{ w \mid w\in\{0,1\}^*, w=xux, x\in\{0,1\}, u\in\{0,1\}^*\}$



$L= \{ w \mid w\in\{a,b\}^*, w=ubaba, u\in\{a,b\}^*\}$

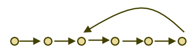


$L= \{ w \mid w\in\{0,1\}^* \wedge$ w je binární zápis čísla dělitelného 5}



$L = \{0^n1^n \mid n\geq 1\}$

není regulární jazyk!



Kongruence

Jak zjistit, že jazyk není rozpoznatelný konečným automatem?

Jak charakterizovat regulární jazyky?

Kongruence

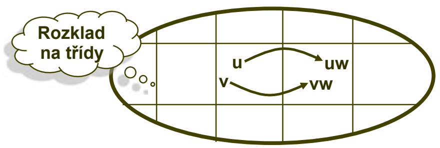
Nechť X je konečná abeceda, ~ je relace ekvivalence (reflexivní, symetrická, transitivní) na X^*. Potom:

a) ~ je *pravá kongruence*, jestliže

$$\forall u,v,w\in X^* \quad u\sim v \Rightarrow uw\sim vw$$

b) je *konečného indexu*, jestliže

rozklad $X^*/\sim$ má konečný počet tříd

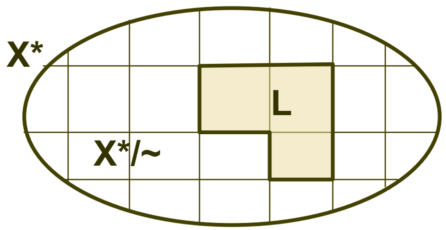


Nerodova věta

Nechť L je jazyk nad konečnou abecedou X. Potom následující tvrzení jsou ekvivalentní:

a) L je rozpoznatelný konečným automatem,

b) existuje pravá kongruence ~ konečného indexu na X^* tak, že L je sjednocením jistých tříd rozkladu $X^*/\sim$.



Důkaz Nerodovy věty

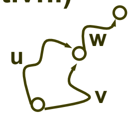
a) $\Rightarrow$ b)

automat $\Rightarrow$ pravá kongruence konečného indexu

definujme $u \sim v \equiv \delta^*(q_0,u) = \delta^*(q_0,v)$

je to ekvivalence (reflexivní, symetrická, transitivní)

je to pravá kongruence (z definice δ^*)



má konečný index (konečně mnoho stavů)

$L = \{ w \mid \delta^*(q_0,w) \in F\} = \cup_{q \in F} \{ w \mid \delta^*(q_0,w) = q\}$

Pozorování:

stavy odpovídají třídám ekvivalence

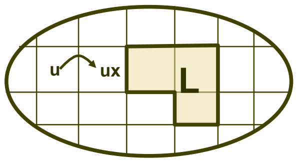
Důkaz Nerodovy věty - pokračování

b) $\Rightarrow$ a)

pravá kongruence konečného indexu $\Rightarrow$ automat

označme [u] třídu rozkladu obsahující slovo u

Jak sestrojíme konečný automat A?



abeceda X dána

stavy Q - třídy rozkladu $X^*/\sim$

stav $q_0 = [\lambda]$

koncové stavy $F = \{c_1,..,c_n\}$, kde $L = \cup_{i=1..n} c_i$

přechodová funkce $\delta([u],x) = [ux]$

přechodová funkce je korektní (z definice pravé kongruence)

Ještě L(A) = L?

$w \in L \Leftrightarrow w \in \cup_{i=1..n} c_i \Leftrightarrow w \in c_1 \vee \dots \vee w \in c_n \Leftrightarrow [w] = c_1 \vee \dots \vee [w] = c_n \Leftrightarrow [w] \in F \Leftrightarrow w \in L(A)$

$\delta^*([\lambda],w) = [w]$

Použití Nerodovy věty

Konstrukce automatů

Příklad:

Sestrojte automat přijímající jazyk

$L = \{w \mid w \in \{a,b\}^* \ \&\ w$ obsahuje 3k+2 symbolů a$\}$

označme $|u|_x$ počet symbolů x ve slově u

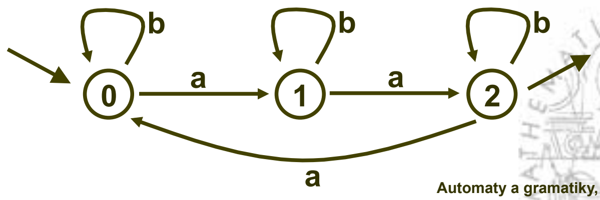
definujme $u \sim v \equiv (|u|_a \bmod 3 = |v|_a \bmod 3)$

tři třídy ekvivalence 0,1,2 (zbytky po dělení 3)

L odpovídá třídě 2

a-přechody přesouvají do následující třídy (mod 3)

b-přechody zachovávají třídu



Použití Nerodovy věty - pokračování

Důkaz neregulárnosti jazyka!

Příklad:

Rozhodněte zda následující jazyk je regulární

$L = \{0^n 1^n \mid n \geq 1\}$.

Předpokládejme, že jazyk je regulární

$\Rightarrow$ existuje pravá kongruence konečného indexu m,

L je sjednocením tříd

vezmeme slova 0, 00, …, 0^{m+1}

dvě slova padnou do stejné třídy (krabičkový princip)

$i \neq j$	$0^i \sim 0^j$
přidejme 1^i	$0^i 1^i \sim 0^j 1^i$ (pravá kongruence)
spor	$0^i 1^i \in L \ \&\ 0^j 1^i \notin L$